Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematika

Základy kvaternionů v algebře a geometrii

Basics of quaternions in algebra and geometry

Bakalářská práce: 12–FP–KMD–006

Autor:

Jana Emilie VESELOVSKÁ

Podpis:

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Vild

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
49	0	7	5	36	0

V Liberci dne: 24. 04. 2012

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2010/2011**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Jana Emilie Veselovská**
Osobní číslo:	**P09000147**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obor:	**Matematika**
Název tématu:	**Základy kvaternionů v algebře a geometrii**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í :

Shromáždit základní poznatky o kvaternionech jako algebraické struktury s nekomutativním násobením. Popsat jejich historii a vývoj (včetně duálních kvaternionů). Porovnat jejich vlastnosti s komplexními čísly. Vyšetřit vztah ke komplexním číslům, uvést různé izomorfní modely. Pojednat o řešení rovnic v oboru kvaternionů. Probrat aplikace v geometrii. Přihlížet k prezentaci tématu a posoudit výklad kvaternionů ve vybraných pramenech.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

BEČVÁŘ, J. 150 let od objevu kvaternionů. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 1993, 38. ročník, 6. číslo, s. 305 - 317.
BIRKHOFF, G. - MACLANE, S. A Survey Of Modern Algebra. New York, 1977.
EBERLY, D. Quaternion Algebra and Calculus. Geometric Tools, LLC, 2010.
HAMILTON, W. R. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. Philosophical Magazine, 1844.
JUDSON, T. J. Abstract Algebra, Theory and Applications. Stephen F. Austin State University, 2011.
KATRIŇÁK, T. aj. Algebra a teoretická aritmetika (1). Alfa/SNTL, Bratislava/Praha, 1986.
PROŠKOVÁ, J. Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace. Plzeň, 2009. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd.
STAHLKE, D. Quaternions in Classical Mechanics, PHYS 621.
VILD, J. - TOMČÍK, D. - DOLEŽAL, R. - HUGHES, G. Groups of order 1-15. Flash applet.
YEFREMOV, A. P. Quaternions: algebra, geometry and physical theories. Russian University of people friendship, 2004. s. 104 - 119.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jaroslav Vild**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **18. dubna 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **27. dubna 2012**

L.S.

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Čestné prohlášení

Název práce: Základy kvaternionů v algebře a geometrii

Jméno a příjmení autora: Jana Emilie Veselovská

Osobní číslo: P09000147

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi své bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 24. 04. 2012

Jana Emilie Veselovská

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu své bakalářské práce panu doc. RNDr. Jaroslavu Vildovi za cenné rady, připomínky a čas, který mi při konzultacích věnoval.

Anotace

Tato bakalářská práce popisuje historii a vývoj komplexních čísel, kvaternionů a s nimi souvisejících bikvaternionů a duálních kvaternionů. Uvádí základní vlastnosti kvaternionů, poukazuje na analogii a rozdíly v porovnání s komplexními čísly a ukazuje různé způsoby zavedení kvaternionů. Nabízí stručné pojednání o speciálních rovnicích v tomto oboru a uvádí i několik příkladů. Poukazuje na možnost využití kvaternionů při výpočtech rotace, což je ilustrováno na několika jednoduchých příkladech a zmiňuje souvislost se speciálními ortogonálními maticemi. Nakonec popisuje některé vlastnosti kvaternionových grup.

Klíčová slova: kvaternion, historie kvaternionů, algebra kvaternionů, rovnice v oboru kvaternionů, rotace, kvaternionová grupa.

Annotation

The bachelor work describes the history and the development of complex numbers, quaternions and related biquaternions and dual quaternions. It presents the basic properties of quaternions, points to an analogy and differences in comparsion with complex numbers and shows different ways to introduce quaternions. It offers a brief discussion of the special equations in this division ring and gives a few examples. The work points to the possibility of using quaternions in the calculations of rotation, which is illustrated on several simple examples and it mentions a connection with special orthogonal matrices. Finally, the work describes some features of quaternion groups.

Key words: quaternion, history of quaternions, quaternion algebra, quaternion equations, rotation, quaternion group.

Obsah

Seznam použitého značení

$q, q_1, q_2, q_3, u, u_r, u_v, s_v, u_1, u_2$	kvaternion
$1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	kvaternionové jednotky
s, s_1, s_2	skalární část kvaternionu
q_d	duální kvaternion
$\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, w, t, t_1, t_2, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{n}$	vektor
$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, z, z_1, z_2, z_3$	komplexní číslo
$\bar{\alpha}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \bar{\beta}, \overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \bar{z}, \overline{z_1}, \overline{z_2}$	komplexně sdružené číslo
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$\mathbb{H}$	množina všech kvaternionů
$\mathbb{H}_p$	množina všech ryzích kvaternionů
$\mathbb{C}$	obor komplexních čísel
$Q, Q_1, Q_2, B, I, J, Z, Z_1, Z_2, A$	matice
E	jednotková matice
$\bar{q}, q^*, \overline{q_1}, \overline{q_2}, \bar{u}, \overline{u_r}, \overline{u_v}$	konjugovaný kvaternion
$\lVert \ldots \rVert$	norma
$\lvert \ldots \rvert$	absolutní hodnota
$q^{-1}, {q_1}^{-1}, {q_2}^{-1}, u^{-1}$	inverzní kvaternion
z^{-1}	inverzní komplexní číslo
$\mathbb{H}_1$	množina všech jednotkových kvaternionů
φ	úhel otočení
$R_v, R(\boldsymbol{v})$	rotace vektoru
$\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$	obecná lineární grupa matic n-tého stupně nad $\mathbb{R}$
A^{-1}	inverzní matice
A^T	transponovaná matice
$\boldsymbol{O}(n)$	ortogonální grupa matic n-tého stupně
$\boldsymbol{SO}(n)$	speciální ortogonální grupa matic n-tého stupně
$\boldsymbol{SL}(2, \mathbb{C})$	speciální lineární grupa matic 2. stupně nad $\mathbb{C}$
$\parallel$	rovnoběžnost
$\perp$	kolmost
I^{-1}, J^{-1}	inverzní matice
$\boldsymbol{\mathcal{N}}$	normální podgrupa
$\mathbb{E}, \mathbb{F}$	těleso
Q_8, Q	kvaternionová grupa
T	množina vybraných prvků z grupy $\boldsymbol{SL}(2, \mathbb{C})$
$\langle T \rangle$	grupa generovaná množinou T
$\langle T \rangle / \boldsymbol{\mathcal{N}}$	faktorová grupa grupy $\langle T \rangle$ podle její normální podgrupy $\boldsymbol{\mathcal{N}}$

1 Úvod

Kvaterniony jsou nekomutativním rozšířením a zobecněním komplexních čísel v trojrozměrném prostoru. Jejich objev se váže k datu 16. 10. 1843 a zasloužil se o něj irský matematik, fyzik a astronom Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Kvaternionem nazval výraz ve tvaru $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, či zkráceně $[s, \mathbf{v}]$, kde $\mathbf{v}$ je vektor ve trojrozměrném prostoru. Pro násobení imaginárních složek stanovil vztahy $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. Kvaterniony tvoří nekomutativní těleso, které je nadtělesem komutativního tělesa komplexních čísel.

Jednotkové kvaterniony, tj. kvaterniony s jednotkovou normou, jsou významné pro počítačovou grafiku a využívají se i pro počítačové hry k dosažení plynulé 3D rotace. Jednotkový kvaternion lze zapsat ve tvaru $u = \cos\varphi + u_v \sin\varphi$, kde $u_v = [0, \boldsymbol{u_v}]$ je jednotkový ryzí kvaternion. Pomocí u se dá vyjádřit rotace kolem $\boldsymbol{u_v}$ o úhel 2φ. Tato reprezentace rotace pomocí kvaternionů je pak výhodnější než pomocí matic, protože v trojrozměrném prostoru počítáme pouze se čtyřmi složkami kvaternionu, u matic typu 3×3 bychom jich potřebovali devět.

Primárním záměrem následujících kapitol je bližší seznámení s problematikou kvaternionů a shromáždění základních poznatků. Nejdříve je zde popsán historický vývoj kvaternionů, výčet některých vlastností a jejich podobnost s vlastnostmi komplexních čísel. Další kapitola se věnuje rovnicím v oboru kvaternionů a prostřednictvím řešených příkladů poukazuje na jisté obtíže, které jsou spojeny s nekomutativností kvaternionů. Následuje část věnovaná rotacím, ve které se s užitím předchozích vlastností zavede výchozí vztah pro rotace, tj. uvu^{-1}. Ten se později využívá k praktickým výpočtům. Závěr je mimo jiné věnován pojednáním o kvaternionových grupách, jejich vlastnostech a izomorfii s dalšími grupami.

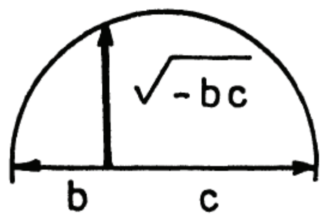
2 Historie kvaternionů

2.1 Historie komplexních čísel

První zmínka o druhých odmocninách ze záporných čísel pochází z 1. století našeho letopočtu a vyskytla se v práci řeckého matematika Herona Alexandrijského. Ten ve své *Stereometrice* došel k výrazu $\sqrt{81-144}$.

Podnětem ke studiu komplexních čísel byly objevy italských matematiků, kteří se v 16. století zabývali řešením algebraických rovnic. Gerolam Cardano (1501–1576) se jimi zabývá v knize *Ars magna* (1545) a Rafael Bombelli (1526–1573) ve svém díle *Algebra* (1572). V 17. a 18. století s komplexními čísly pracovala řada dalších matematiků, mj. i René Descartes (1596–1650), který použil termín „imaginární číslo“ či Leonhard Euler (1707–1783), jenž zavedl symbol *i* pro $\sqrt{-1}$. Koncem 18. století našla komplexní čísla hojné využití v matematické analýze, hydrodynamice nebo kartografii. Stále však byla kladena otázka, jak si představit komplexní čísla a jak chápat prvek $\sqrt{-1}$.

O první vysvětlení se pokusil matematik John Wallis (1616–1703), jehož znázornění imaginárního čísla $\sqrt{-bc}$ jako kolmé úsečky k opačně orientovaným úsečkám *b*, *c* se však nedočkalo žádného ohlasu.



Obrázek 1: Wallisovo znázornění komplexního čísla

Euler použil polární souřadnice a komplexní číslo vyjádřil v goniometrickém tvaru

$$x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Chápal tedy komplexní číslo $x + \mathrm{i}y$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi (*x*, *y*).

Roku 1799 se o další interpretaci pokusil norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818). Ten zavedl osu imaginární kolmou k reálné, vektory roviny reprezentoval komplexními čísly a operace s vektory prováděl pomocí operací s komplexními čísly. Pro $\sqrt{-1}$ užíval označení ε. Tento systém využil pro řešení geodetických úloh. Jeho práce však zapadla.

O 7 let později interpretoval švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822) $\sqrt{-1}$ jako otočení roviny o 90°.

Na přelomu 18. a 19. stol. dospěl ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny i Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Jeho myšlenka se rozšířila i díky knize Augustina Louise Cauchyho (1789–1857). V 19. stol. pak proto byla rovina komplexních čísel nazývána Gaussova či Cauchyova rovina. Pro sčítání a násobení byly zavedeny tyto vztahy:

$$(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'),$$

$$(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx'),$$

popř. v goniometrickém tvaru:

$$r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi') = r \cdot r'[\cos(\varphi + \varphi') + \mathrm{i}\sin(\varphi + \varphi')].$$

Hamilton toto pojetí roku 1833 mírně modifikoval v souladu s chápáním komplexních čísel jako uspořádaných dvojic reálných čísel. Pro uvedené operace tedy zavedl tyto vztahy:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Komplexní číslo $x + \mathrm{i}y$ je v rovině s kartézskými souřadnicemi znázorněno bodem $M = [x, y]$ či vektorem $\overrightarrow{OM}$, kde O je počáteční bod a M koncový.

2.2 Rozšiřování oboru komplexních čísel

Geometrická interpretace komplexních čísel a způsob, jakým jsou komplexní čísla vytvořena z čísel reálných procesem zdvojení, vedly k pokusům o rozšíření oboru komplexních čísel na větší číselný obor. Tato vícesložková čísla se později začala nazývat hyperkomplexní čísla.

Předmětem zájmu se staly formální výrazy typu

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a je pevně zvolené, $a_0, a_1, \dots, a_n$ reálná čísla a $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ nové základní jednotky. Sčítání těchto výrazů bylo definováno po složkách a mělo tyto vlastnosti: asociativita, komutativita, existence nulového prvku a existence opačných prvků. Násobení těchto nových čísel mělo být asociativní a komutativní, měl existovat jednotkový prvek a ke každému nenulovému prvku prvek inverzní. Tyto požadavky tak komplikovaly nalezení vhodných vzorců.

Těmito problémy se začal zabývat Hamilton, Arthur Cayley (1821–1895), Augustus de Morgan (1806–1871) a další. Cílem bylo nalézt nový číselný obor (alespoň trojsložkových čísel), který by rozšiřoval obor čísel komplexních a tvořil by komutativní těleso.

Hamilton se při svém snažení zaměřil na trojsložková čísla. Věděl, že komplexní čísla mohou být znázorněna jako body v rovině a že je lze sčítat a násobit užitím geometrických operací. Hamilton se snažil najít způsob, jak udělat to samé pro body v prostoru. Ty mohou být reprezentovány souřadnicemi, což jsou trojice čísel a lze je sčítat. Hamilton se však potýkal s problémem, jak definovat odpovídající násobení a dělení. Ve snaze nalézt vzorec pro násobení stále narážel na struktury s netriviálními děliteli nuly. Při dělení nemohl přijít na to, jak vypočítat podíl souřadnic dvou bodů v prostoru. Hamilton svůj problém zmínil i v dopise svému synovi Archibaldovi: Na začátku října 1843 jste se mě, ty a tvůj bratr William Edward, každé ráno u snídaně ptali: „Táto, už umíš násobit trojice?“ A já vždy smutně zavrtěl hlavou a odpověděl: „Ne, umím je pouze sčítat a odčítat.“

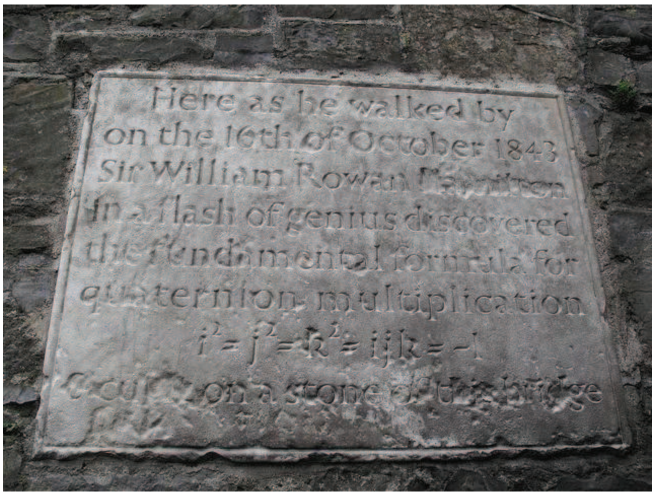
Obrázek 2: William Rowan Hamilton

2.3 Hamiltonovy kvaterniony

Průlom nastal v pondělí 16. října 1843 v Dublinu, kdy se Hamilton procházel se svou manželkou a byl na cestě do Královské irské akademie věd. Když přecházel pro Broughamském mostu (nyní Broom Bridge) přes Royal Canal, vytanulo mu na mysli řešení. Ačkoliv neuměl „násobit trojice“, viděl způsob, jak totéž provést pro čtveřice. Užitím tří čísel ze čtveřice jako bodů souřadnic prostoru mohl Hamilton reprezentovat body prostoru novým systémem čísel. Neodolal tedy nutkání a tento vzorec, resp. generující vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

pro násobení základních jednotek vyryl kapesním nožem do mostu. Čtveřice s těmito pravidly pro násobení nazval kvaterniony. Dodnes tuto událost připomíná deska s nápisem:



Obrázek 3: Pamětní deska v Dublinu

Here as walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge.

Následující den napsal dopis svému příteli matematikovi Johnu T. Gravesovi a popsal mu myšlenkové pochody, které ho dovedly k jeho objevu. Dopis byl později publikován v *London*, *Edinburgh*, *and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Graves se Hamiltonem inspiroval a již v prosinci téhož roku nalezl systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami. Nezávisle na Gravesovi je však objevil i Cayley. Pro tato čísla se proto užívá termín Cayleyova čísla nebo Gravesova-Cayleyova čísla, případně jsou podle Hamiltona označována jako oktávy či oktoniony. Graves se dále pokoušel nalézt systém hyperkomplexních čísel s 16 základními jednotkami. Jeho úsilí však bylo marné, neboť roku 1898 dokázal německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919), že systém hyperkomplexních čísel lze vytvořit pouze pro $n = 1, 2, 4, 8$. S tím souvisí tzv. zobecněná Frobeniova věta, která říká, že reálné alternativní algebry s dělením konečné dimenze existují právě čtyři.

Tabulka 1: Reálné alternativní algebry

n	**číselný obor**	**algebra**
1	reálná čísla… $\mathbb{R}$	komutativní, asociativní
2	komplexní čísla… $\mathbb{C}$	komutativní, asociativní
4	kvaterniony… $\mathbb{H}$	**ne**komutativní, asociativní
8	oktoniony	**ne**komutativní, **ne**asociativní

Existuje však nekonečně mnoho algeber, které nejsou ani alternativní, ale jejich popis ještě není zcela znám.

Poznámka: Algebra je alternativní, platí-li pro každou dvojici jejích prvků x, y:

$$(xx)y = x(xy) \wedge y(xx) = (yx)x.$$

Hamilton kvaterninony oprávněně označoval jako obor hyperkomplexních čísel, který je nejbližší číslům komplexním a předpovídal jim i stejnou důležitost. Posléze zasvětil zbytek svého života studiu a vyučování kvaternionů, založil dokonce i školu „kvaternionistů" a rovněž vydal i několik knih pro jejich popularizaci. V jedné z nich rozpracoval pomocí kvaternionů vektorovou algebru. Poslední a nejrozsáhlejší kniha s názvem *Elements of Quaternions* měla 800 stran a byla publikována krátce po jeho smrti.

Hamiltonovými následovníky se potom stali jeho žáci Peter Tait či Benjamin Peirce. Oba pokračovali ve snaze propagovat kvaterniony. Ty našly své využití ve fyzice a geometrii. Od 80. let 19. stol. však začaly být kvaterniony nahrazovány vektorovou analýzou, která byla jednodušší a srozumitelnější. Posléze zastávaly stále menší roli v matematice a fyzice, což bylo mj. způsobeno i rozvleklým a nejasným stylem, jakým Hamilton svá díla psal. Často byla pro čtenáře obtížně pochopitelná i kvůli svým nezvyklým definicím.

Důležitost kvaternionů však byla obnovena na konci 20. stol. díky jejich užitečnosti při popisu rotací v prostoru. Znázornění rotací pomocí kvaternionů je totiž výhodnější než pomocí matic. Z toho důvodu jsou užívány např. v počítačové grafice, robotice, fyzice, bioinformatice, molekulární dynamice nebo pro počítačové simulace. První masově prodávanou počítačovou hrou, u které byly využity kvaterniony k dosažení plynulé 3D rotace, byl roku 1996 *Tomb Raider*. Nicméně význam kvaternionů se nikdy nevyrovnal významu komplexních čísel.

2.4 Bikvaterniony a duální kvaterniony

Kromě kvaternionů zavedl Hamilton roku 1853 tzv. bikvaterniony

$$q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,\ \ s, x, y, z \in \mathbb{C},$$

tedy kvaterniony s komplexními koeficienty. O 20 let později byl následován anglickým matematikem a filozofem Williamem Kingdonem Cliffordem (1845–1879), jenž Hamiltonovo zavedení považoval za zbytečné a „kvaternion s komplexními čísly“ tak nahradil „komplexním číslem s kvaterniony“. Zavedl tedy výrazy typu

$$b = x + \omega y,$$

kde $x, y \in \mathbb{H}$ a ω je nová základní jednotka, pro kterou platí $\omega^2 = 1$.

Cliffordovy články o bikvaternionech vedly k objevu duálních čísel. Tato dvousložková čísla jsou jistou modifikací komplexních čísel, mají s nimi společné i některé vlastnosti a zapisují se ve tvaru

$$z = a + \varepsilon b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a ε je tzv. duální jednotka, pro kterou platí $\varepsilon^2 = 0$, tzn. že ε je nilpotentní. (Prvotně se místo symbolu ε užívalo značení ω. To bylo později nahrazeno z důvodu možné záměny se symbolem pro úhlovou rychlost.) Vznikla tedy rozšířením reálných čísel přidáním prvku ε. Poprvé byla zmíněna roku 1901 německým matematikem Eduardem Studym (1862–1930) a následně aplikována na bikvaterniony. Výsledkem byl vznik duálních kvaternionů. Ty jsou definovány podobným způsobem jako kvaterniony, ale jejich koeficienty jsou místo čísel reálných duální. Duální kvaternion q_d lze tedy zapsat pomocí uspořádané čtveřice ve tvaru

$$q_d = (s + \varepsilon s_0, x + \varepsilon x_0, y + \varepsilon y_0, z + \varepsilon z_0),$$

kde $\varepsilon^2 = 0$ a ostatní prvky jsou reálné. Další úpravou tak dostaneme výraz

$$q_d = (s, x, y, z) + \varepsilon(s_0, x_0, y_0, z_0) = q + \varepsilon q_0,$$

kde $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ a $q_0 = s_0 + \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$ jsou reálné kvaterniony.

(viz [1], [29], [23], [27], [28])

3 Algebra kvaternionů

Definice: Kvaternion q je definován vztahem

$$q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

kde s, x, y, $z \in \mathbb{R}$, s je koeficient reálné jednotky „1” a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jsou imaginární jednotky splňující následující vztahy:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k},\ \ \mathbf{kj} = -\mathbf{i},\ \ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Každý kvaternion je tedy lineární kombinací prvků 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Kvaternion lze též psát ve tvaru uspořádané čtveřice

$$q = [s, (x, y, z)], \qquad s, x, y, z \in \mathbb{R}$$

či zkráceně

$$q = [s, \mathbf{v}], \qquad s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

kde s je skalár a $\mathbf{v}$ je chápán jako vektor v trojrozměrném prostoru.

Poznámka: O vzájemné poloze kvaternionů rozhodují jejich vektorové složky, tzn., že kvaterniony jsou ***paralelní***, resp. ***ortogonální***, jsou-li ***paralelní***, resp. ***ortogonální*** jejich vektorové složky.

Množina všech kvaternionů se značí $\mathbb{H}$ (podle objevitele Hamiltona).

Kvaterniony lze zavést též pomocí matic:

Nechť $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, takže tyto prvky splňují výše uvedené vztahy. Nechť je $\mathbb{H}$ množina prvků tvaru $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$**,** kde $s, x, y, z \in \mathbb{R}$. Pak $\mathbb{H}$ můžeme chápat jako množinu komplexních matic typu 2×2 ve tvaru

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

kde $\alpha = s + iz$ a $\beta = x + iy$ jsou komplexní čísla a $\bar{\alpha} = s - iz$, $\bar{\beta} = x - iy$ čísla k nim komplexně sdružená. (viz [22]) Neboť jednoduchým sečtením jednotlivých matic dostaneme, že

$$s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} s + iz & x + iy \\ -x + iy & s - iz \end{bmatrix} = Q,$$

matice Q tedy reprezentuje kvaternion $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

Kvaternion $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,\ s, x, y, z \in \mathbb{R}$ může být reprezentován též reálnou maticí typu 4×4 ve tvaru

$$B = \begin{bmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & -z & y \\ -y & z & s & -x \\ -z & -y & x & s \end{bmatrix}.$$

Matici B získáme jako součet skalární diagonální matice a kososymetrické matice (= matice, jejíž prvky jsou souměrné podle hlavní diagonály a liší se znaménkem), tedy

$$B = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & -z & y \\ -y & z & 0 & -x \\ -z & -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

V této reprezentaci pak konjugovaný kvaternion odpovídá transponované matici. Čtvrtá mocnina normy kvaternionu odpovídá determinantu jeho příslušné matice. (viz [30])

Definice: Nechť jsou dána dvě tělesa, $\mathbb{E}$ a $\mathbb{F}$. Říkáme, že $\mathbb{E}$ je ***rozšířením*** $\mathbb{F}$, jestliže $\mathbb{F}$ je podmnožinou $\mathbb{E}$ a operace v $\mathbb{F}$ jsou tytéž jako v restrikci $\mathbb{E}$ na $\mathbb{F}$. (viz [5 s. 3])

Další možná reprezentace kvaternionů je pomocí komplexních čísel. Komplexní čísla vznikají rozšířením reálných čísel zavedením jednotky i, pro kterou platí $i^2 = -1$. Každé komplexní číslo může být zapsáno ve tvaru $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$. Kvaterniony mohou být zkonstruovány z komplexních čísel podobným způsobem. Nová jednotka j je definována tak, že platí $j^2 = -1$ a zároveň předpokládáme antikomutativnost násobení obou jednotek, tzn. $ij = -ji$. Kvaternion pak zapíšeme ve tvaru $q = z_1 + jz_2$, kde z_1, z_2 jsou komplexní čísla. (viz [14 s. 2]) Platí tedy:

Nechť je $\mathbb{C}^2$ dvourozměrný vektorový prostor nad komplexními čísly. Zvolme bázi o dvou prvcích 1 a j. Vektor z $\mathbb{C}^2$ lze pak zapsat pomocí těchto prvků jako

$$(a + ib)1 + (c + id)j.$$

Použijeme-li $j^2 = -1$ a $ij = -ji$, můžeme násobit dva vektory užitím distributivního zákona. Označení ij symbolem k následně vede ke stejným pravidlům pro násobení jako u obvyklých kvaternionů. Proto výše uvedený vektor komplexních čísel odpovídá kvaternionu

$$a + ib + jc + kd.$$

Využijeme-li pro prvky z $\mathbb{C}^2$ zápis uspořádaných dvojic a pro kvaterniony zápis uspořádaných čtveřic, dostaneme vztah

$$(a + ib, c + id) \leftrightarrow (a, b, c, d).$$

(viz [30])

3.1 Vlastnosti kvaternionů a komplexních čísel

Pro úplnost nejprve doplním definici komplexních čísel.

Definice: Komplexní číslo je číslo ve tvaru $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$. Komplexní číslo lze též psát ve tvaru uspořádané dvojice

$$z = [a, b],\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Množina všech komplexních čísel se značí $\mathbb{C}$.

Komplexní čísla mohou být reprezentována pomocí matic:

Nechť je dána jednotková matice $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matice $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a také platí $I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Nechť je $\mathbb{C}$ množina prvků tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak $\mathbb{C}$ můžeme chápat jako množinu reálných matic typu 2×2 ve tvaru

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Neboť dosazením a sečtením dostanu:

$$z = a + ib = aE + bI = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = Z.$$

(viz [24])

3.1.1 Skalární a ryzí kvaternion × reálné a ryze imaginární číslo

Definice: Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pak q nazýváme ***skalární kvaternion***.

Definice: Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$ a $s = 0$, pak q nazýváme ***ryzí kvaternion***.

Množinu všech ryzích kvaternionů značíme $\mathbb{H}_p$.

Definice: Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$ a $b = 0$, pak z je ***reálné číslo***.

Definice: Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$ a $a = 0$, pak z je ***ryze imaginární číslo***.

3.1.2 Konjugovaný kvaternion × komplexně sdružené číslo

Definice: Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$, resp. $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \in \mathbb{H}$, $s, x, y, z \in \mathbb{R}$. Pak kvaternion $\bar{q}$ nazveme ***konjugovaným kvaternionem*** s kvaternionem q, jestliže platí $\bar{q} = \overline{[s, \mathbf{v}]} = [s, -\mathbf{v}]$, resp. $\bar{q} = s - \mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z$.

Poznámka: Místo označení $\bar{q}$ se někdy používá i symbol q^*.

Věta: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Pak platí, že $({q_1}^*)^* = q_1$, $(q_1 q_2)^* = {q_2}^* {q_1}^*$.

Definice: Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Pak komplexní číslo $\bar{z}$ nazveme ***komplexně sdruženým číslem*** k číslu z, jestliže platí $\bar{z} = a - ib$.

Věta: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pak platí, že $\overline{\overline{z_1}} = z_1$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, tedy komplexně sdružené číslo ke komplexně sdruženému číslu se rovná číslu samotnému, komplexně sdružený součet, rozdíl, součin nebo podíl prvků se rovná součtu, rozdílu, součinu nebo podílu komplexně sdružených prvků.

3.1.3 Rovnost kvaternionů × rovnost komplexních čísel

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1]$ a $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2]$. Pak platí

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow s_1 = s_2 \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

Definice: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, kde $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$. Pak platí

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

3.1.4 Součet, resp. rozdíl kvaternionů × součet, resp. rozdíl komplexních čísel

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1] = s_1 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1$ a $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2] = s_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$. Pak je ***součet***, resp. ***rozdíl*** definován takto

$$q_1 \pm q_2 = [s_1, \mathbf{v}_1] \pm [s_2, \mathbf{v}_2] = [s_1 \pm s_2, \mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2], \text{ resp.}$$

$$\begin{aligned} q_1 \pm q_2 &= (s_1 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1) \pm (s_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2) \\ &= (s_1 \pm s_2) + (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Definice: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, kde $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$. Pro ***součet***, resp. ***rozdíl*** platí

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

3.1.5 Součin kvaternionů × součin komplexních čísel

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = s_1 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1$ a $q_2 = s_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$. Pak je ***součin*** definován vztahem

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (s_1 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1)(s_2 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2) \\ &= s_1s_2 + \mathbf{i}s_1x_2 + \mathbf{j}s_1y_2 + \mathbf{k}s_1z_2 + \mathbf{i}x_1s_2 + \mathbf{i}^2x_1x_2 + \mathbf{ij}x_1y_2 + \mathbf{ik}x_1z_2 + \\ &\quad \mathbf{j}y_1s_2 + \mathbf{ji}y_1x_2 + \mathbf{j}^2y_1y_2 + \mathbf{jk}y_1z_2 + \mathbf{k}z_1s_2 + \mathbf{ki}z_1x_2 + \mathbf{kj}z_1y_2 + \mathbf{k}^2z_1z_2 \\ &= s_1s_2 + \mathbf{i}s_1x_2 + \mathbf{j}s_1y_2 + \mathbf{k}s_1z_2 + \mathbf{i}x_1s_2 - x_1x_2 + \mathbf{k}x_1y_2 - \mathbf{j}x_1z_2 + \\ &\quad \mathbf{j}y_1s_2 - \mathbf{k}y_1x_2 - y_1y_2 + \mathbf{i}y_1z_2 + \mathbf{k}z_1s_2 + \mathbf{j}z_1x_2 - \mathbf{i}z_1y_2 - z_1z_2 \\ &= (s_1s_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (s_1x_2 + x_1s_2 + y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (s_1y_2 - x_1z_2 + y_1s_2 + z_1x_2)\mathbf{j} + (s_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1s_2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Věta: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1]$ a $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2]$. Pak pro násobení platí vztah

$$q_1 q_2 = [s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1],$$

kde $\cdot$ je skalární součin a $\times$ je vektorový součin v $\mathbb{R}^3$.

Poznámka:

Součin skalárních kvaternionů odpovídá součinu reálných čísel, výsledkem je opět reálné číslo a operace je komutativní.

Součinem skalárního a ryzího kvaternionu je ryzí kvaternion a operace je komutativní, neboť

$$q_1 q_2 = s_1(0 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2) = \mathbf{i}s_1 x_2 + \mathbf{j}s_1 y_2 + \mathbf{k}s_1 z_2$$

$$= \mathbf{i}x_2 s_1 + \mathbf{j}y_2 s_1 + \mathbf{k}z_2 s_1 = (0 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2)s_1 = q_2 q_1.$$

Součin ryzích kvaternionů $q_1 = [0, \mathbf{v}_1]$ a $q_2 = [0, \mathbf{v}_2]$ odpovídá výrazu

$$q_1 q_2 = [-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2].$$

Z vlastností skalárního a vektorového součinu proto vyplývá, že:

- pokud je $q_1 \parallel q_2$, pak $q_1 q_2 = [-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]$,
- pokud je $q_1 \perp q_2$, pak $q_1 q_2 = [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]$.

Poznámka: Maticová reprezentace součinu kvaternionu $q_1\ a\ q_2$, kde

1) q_1 odpovídá matici $Q_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\overline{\beta_1} & \overline{\alpha_1} \end{bmatrix}$ a q_2 odpovídá matici $Q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\overline{\beta_2} & \overline{\alpha_2} \end{bmatrix}$:

$$Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\overline{\beta_1} & \overline{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\overline{\beta_2} & \overline{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2} & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \overline{\alpha_2} \\ -\overline{\beta_1} \alpha_2 - \overline{\alpha_1} \overline{\beta_2} & -\overline{\beta_1} \beta_2 + \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2} & \beta_1 \overline{\alpha_2} + \alpha_1 \beta_2 \\ -\overline{(\beta_1 \overline{\alpha_2} + \alpha_1 \beta_2)} & \overline{(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \overline{\beta_2})} \end{bmatrix},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ a využíváme zde komutativitu komplexních čísel;

2) $q_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ a $q_2 = \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} s_1 & -x_1 & -y_1 & -z_1 \\ x_1 & s_1 & -z_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & s_1 & -x_1 \\ z_1 & -y_1 & x_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

resp.

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} s_2 & -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ x_2 & s_2 & z_2 & -y_2 \\ y_2 & -z_1 & s_2 & x_2 \\ z_2 & y_2 & -x_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

(viz [13 s. 2, 3], [22])

Poznámka:

1) Násobení kvaternionů není komutativní, tzn.

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1,$$

ale není ani antikomutativní, tzn.

$$q_1 q_2 \neq -q_2 q_1,$$

neboť např. $1\mathbf{i} \neq -\mathbf{i}1$, protože $1\mathbf{i} = \mathbf{i}1$.

2) Násobení kvaternionů je asociativní, tzn.

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

3) Násobení kvaternionů je distributivní vůči sčítání, tzn.

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3,$$
$$(q_2 + q_3) q_1 = q_2 q_1 + q_3 q_1.$$

Poznámka: Součinem dvou na sebe kolmých nenulových ryzích kvaternionů je ryzí kvaternion.

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1] = [s_1, (x_1, y_1, z_1)]$ a $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2] = [s_2, (x_2, y_2, z_2)]$. Pak je ***vektorový součin*** definován jako

$$q_1 \times q_2 = \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} = (y_1 z_2 - z_1 x_2)\mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\mathbf{k}.$$

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_p$. Pak je ***vektorový součin*** definován jako

$$q_1 \times q_2 = \frac{q_2\overline{q_1} + q_1 q_2}{2}.$$

Definice: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, kde $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1] = [s_1, (x_1, y_1, z_1)]$ a $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2] = [s_2, (x_2, y_2, z_2)]$. Pak je ***skalární součin*** definován jako

$$q_1 \cdot q_2 = s_1 s_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = s_1 s_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Definice: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, kde $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$. Pak je ***součin*** definován vztahem

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Poznámka: Maticová reprezentace součinu komplexních čísel z_1a z_2, kde

1) z_1 odpovídá matici $Z_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ a z_2 odpovídá matici $Z_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$:

$$Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix},$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$;

2) $z_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ a $z_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$:

$$z_1 z_2 = Z_1 z_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 \end{bmatrix},$$

resp.

$$z_1 z_2 = Z_2 z_1 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 \end{bmatrix}.$$

(viz [22])

Poznámka:

1) Násobení komplexních čísel je komutativní, tzn.
$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2) Násobení komplexních čísel je asociativní, tzn.
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3) Násobení komplexních čísel je distributivní vůči sčítání, tzn.
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$
$$(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1.$$

3.1.6 Norma kvaternionu × absolutní hodnota komplexního čísla

Definice: Nechť $q \in \mathbb{H}$, kde $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$. ***Normu kvaternionu*** pak definujeme jako

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

tedy $\|q\| \geq 0$. Norma je nulová, právě když je q nulový kvaternion, tedy když pro jeho koeficienty platí: $s = x = y = z = 0$.

Věta: Nechť $q_1,\ q_2 \in \mathbb{H}$. Pak platí $\|q_1 q_2\| = \|q_1\|\|q_2\|$, $\|q_1\|^2 = q_1\overline{q_1}$, tedy norma součinu se rovná součinu norem a druhá mocnina normy prvku se rovná součinu daného prvku s jeho konjugovaným prvkem.

Poznámka: V některých zdrojích (viz [6 s. 2]) se můžeme setkat s označením *N*(*q*) nazývaným též norma, ale definovaným

$$N(q) = N(s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = s^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Tato norma splňuje vlastnosti: $N(q^*) = N(q)$, $N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Definice: Nechť $z \in \mathbb{C}$, kde $z = a + ib$. ***Absolutní hodnotu***, resp. ***modul***, resp. ***normu komplexního čísla*** pak definujeme jako

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z},$$

tedy $|z| \geq 0$. Absolutní hodnota je nulová, právě když $z = 0 + i0$.

Věta: Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pak platí $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$.

3.1.7 Inverzní kvaternion × inverzní komplexní číslo

Definice: Nechť $q \in \mathbb{H}$, kde $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ a nechť $q \neq 0$. Pak je ***inverzním*** prvkem ke kvaternionu q jediný kvaternion q^{-1} s vlastností $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, pro který platí

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q\bar{q}} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\bar{q}}{N(q)}.$$

Věta: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Pak platí $({q_1}^{-1})^{-1} = q_1$, $(q_1 q_2)^{-1} = {q_2}^{-1}{q_1}^{-1}$, tedy inverzní prvek k inverznímu prvku je roven prvku samotnému a inverzní součin prvků je roven součinu inverzních prvků v opačném pořadí.

Definice: Nechť $z \in \mathbb{C}$, kde $z = a + ib$ a nechť $z \neq 0$. Pak je ***inverzním*** prvkem ke komplexnímu číslu z jediné komplexní číslo z^{-1} s vlastností $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$, pro které platí

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

3.1.8 Opačný kvaternion × opačné komplexní číslo

Definice: Nechť $q \in \mathbb{H}$, kde $q = [s, \mathbf{v}]$. Pak je ***opačným kvaternionem*** ke kvaternionu q kvaternion $-q = [-s, -\mathbf{v}]$.

Definice: Nechť $z \in \mathbb{C}$, kde $z = a + ib$. Pak je ***opačným komplexním číslem*** ke komplexnímu číslu z komplexní číslo $-z = -a - ib$.

3.1.9 Jednotkový kvaternion × komplexní jednotka

Definice: Nechť $q \in \mathbb{H}$. Je-li $\|q\| = 1$, pak q nazýváme ***jednotkovým kvaternionem***.

Množinu všech jednotkových kvaternionů značíme $\mathbb{H}_1$.

Věta: Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$. Potom platí

$$\|q_1 q_2\| = \|q_2 q_1\| = 1,$$

tj. součin dvou jednotkových kvaternionů je také jednotkový kvaternion a platí

$${q_1}^{-1} = \overline{q_1},$$

tj. inverzní prvek jednotkového kvaternionu je roven jeho konjugovanému kvaternionu.

Poznámka: Dva jednotkové ortogonální kvaterniony nazýváme ***ortonormální***.

Poznámka: Dosazením do vzorce pro násobení snadno zjistíme, že $q^2 = -1$, kde $q \in \mathbb{H}_1$.

Definice: Nechť $z \in \mathbb{C}$. Je-li $|z| = 1$, pak z nazýváme ***komplexní jednotkou***.

3.1.10 Podíl kvaternionů × podíl komplexních čísel

Definice: Nechť $q_1,\ q_2 \in \mathbb{H}$. Definujeme pravé (P) a levé (L) dělení (z důvodu nekomutativnosti). ***Podíl*** je pak definován vztahem

$$\left.\frac{q_1}{q_2}\right|_P = \frac{q_1\overline{q_2}}{\|q_2\|^2}, \quad \left.\frac{q_1}{q_2}\right|_L = \frac{\overline{q_2}q_1}{\|q_2\|^2}.$$

Definice: Nechť $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, kde $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ a $z_2 \neq 0$. Pak je ***podíl*** definován vztahem

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right),$$

tedy

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

3.1.11 $\mathbb{H}$ – nekomutativní těleso × $\mathbb{C}$ – komutativní těleso

Věta: ($\mathbb{H}$, +) je komutativní grupa, kde platí:

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{H}\ \exists\, c \in \mathbb{H}: a + b = c$ *(úplnost sčítání)*
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{H}: a + (b + c) = (a + b) + c$ *(asociativita sčítání)*
3. $\forall\, a, b \in \mathbb{H}: a + b = b + a$ *(komutativita sčítání)*
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{H}\ \forall\, a \in \mathbb{H}: a + 0 = 0 + a = a$ *(existence nulového prvku)*
   $0 = [0, (0, 0, 0)]$…nulový kvaternion
5. $\forall\, a \in \mathbb{H}\ \exists - a \in \mathbb{H}: a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(existence opačných prvků)*

Věta: $(\mathbb{H}, \cdot)$ je nekomutativní grupa, kde platí:

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{H}\ \exists\, c \in \mathbb{H}: a \cdot b = c$ *(úplnost násobení)*
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{H}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(asociativita násobení)*
3. $\forall\, a, b \in \mathbb{H}: a \cdot b \neq b \cdot a$ *(nekomutativita násobení)*
4. $\exists\, 1 \in \mathbb{H}\ \forall\, a \in \mathbb{H}: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(existence jednotkového prvku)*
   $1 = [1, (0, 0, 0)]$
5. $\forall\, a \in \mathbb{H}, a \neq 0\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{H}: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(existence inverzních prvků)*

Navíc platí *distributivita* násobení vzhledem ke sčítání:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{H}: \quad \begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \end{aligned}$$

Věta: $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ je nekomutativní těleso.

Věta: $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa, kde platí:

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{C}\ \exists\, c \in \mathbb{C}: a + b = c$ *(úplnost sčítání)*
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{C}: a + (b + c) = (a + b) + c$ *(asociativita sčítání)*
3. $\forall\, a, b \in \mathbb{C}: a + b = b + a$ *(komutativita sčítání)*
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{C}\ \forall\, a \in \mathbb{C}: a + 0 = 0 + a = a$ *(existence nulového prvku)*
   $0 = [0, 0]$
5. $\forall\, a \in \mathbb{C}\ \exists - a \in \mathbb{C}: a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(existence opačných prvků)*

Věta: $(\mathbb{C}, \cdot)$ je komutativní grupa, kde platí:

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{C}\ \exists\, c \in \mathbb{C}: a \cdot b = c$ *(úplnost násobení)*
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{C}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(asociativita násobení)*
3. $\forall\, a, b \in \mathbb{C}: a \cdot b = b \cdot a$ *(komutativita násobení)*
4. $\exists\, 1 \in \mathbb{C}\ \forall\, a \in \mathbb{C}: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(existence jednotkového prvku)*
   $1 = [1, 0]$
5. $\forall\, a \in \mathbb{C}, a \neq 0\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{C}: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(existence inverzních prvků)*

Navíc platí *distributivita* násobení vzhledem ke sčítání:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{C}: \quad \begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \end{aligned}$$

Věta: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

4 Rovnice v oboru kvaternionů

Nejprve budeme uvažovat lineární rovnice ve tvaru např.

$$axb^2 = c,$$

kde a, b, c jsou dané kvaternionové výrazy a x je neznámý kvaternion, eventuelně soustavu lineárních rovnic ve tvaru např.

$$axb = c,$$

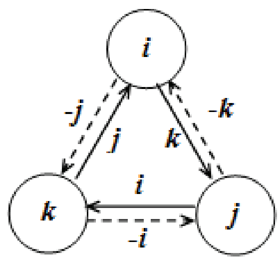
$$dx + ye = f,$$

kde a, b, c, d, e, f jsou kvaterniony a x, y neznámé kvaterniony. Tvary těchto rovnic můžeme považovat jako zástupce příkladů, které se ještě dají „rozumně“ řešit. V případě složitějších rovnic by výpočty byly velmi pracné a to zejména z důvodu nekomutativnosti kvaternionů. (viz [17])

4.1 Příklady

1. Vyřešte v $\mathbb{H}$ rovnici $(1 - i + j - 2k)^{-2}x(i + 3k)^2 = 3i - k$.

Řešení: Bereme v úvahu **ne**komutativnost násobení kvaternionů a vztahy pro násobení imaginárních jednotek, které lze ilustrovat uvedeným schématem:



Obrázek 4: Vztahy pro násobení imaginárních jednotek

Osamostatníme neznámou x:

$$x = (1 - i + j - 2k)^2(3i - k)(i + 3k)^{-2},$$

poté zjednodušíme mocniny:

$$(1 - i + j - 2k)^2 = (1 - i + j - 2k)(1 - i + j - 2k) =$$

$$= 1 - i + j - 2k - i + i^2 - ij + 2ik + j - ji + j^2 - 2jk - 2k + 2ki - 2kj +$$

$$4k^2 = 1 - i + j - 2k - i - 1 - k - 2j + j + k - 1 - 2i - 2k + 2j + 2i - 4 =$$

$$= -5 - 2i + 2j - 4k = -(5 + 2i - 2j + 4k).$$

Všimněme si, že se výrazy s opačným součinem kvaternionových jednotek odečtou, např. $2ik + 2ki$ nebo $-2jk - 2kj$.

Výraz $(i+3k)^{-2}$ nejprve umocníme na druhou a k výsledku nalezneme inverzní prvek:

$$(i+3k)^2 = (i+3k)(i+3k) = i^2 + 3ik + 3ki + 9k^2 =$$

$$= -1 - 3j + 3j - 9 = -10,$$

tedy $(i+3k)^{-2} = -1/10$.

Po úpravách dostaneme:

$$\underline{\underline{x}} = -(5+2i-2j+4k)(3i-k)(-1/10) = (5+2i-2j+4k)(3i-k)/10$$

$$= (15i - 5k + 6i^2 - 2ik - 6ji + 2jk + 12ki - 4k^2)/10$$

$$= (15i - 5k - 6 + 2j + 6k + 2i + 12j + 4)/10 = \underline{\underline{(-2+17i+14j+k)/10}}.$$

2. Vyřešte v $\mathbb{H}$ soustavu rovnic:

$$(2-j)x(1+i) = -4+4i-3j-3k \qquad (1)$$

$$(1+k)x + y(2+i) = 1+3i+2j-5k \qquad (2)$$

Řešení: Nejprve z rovnice (1) vyjádříme *x*:

$$x = (2-j)^{-1}(-4+4i-3j-3k)(1+i)^{-1}, \qquad (3)$$

využijeme vztah pro nalezení inverzního prvku k nenulovému kvaternionu:

$$(2-j)^{-1} = \frac{2+j}{2^2+(-1)^2} = \frac{2+j}{5},$$

$$(1+i)^{-1} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2},$$

dosadíme do (3) a vypočítáme *x*:

$$\underline{\underline{x}} = \frac{2+j}{5}(-4+4i-3j-3k)\frac{1-i}{2} = \frac{1}{10}(2+j)(-4+4i-3j-3k)(1-i)$$

$$= \frac{1}{10}(-8+8i-6j-6k-4j+4ji-3j^2-3jk)(1-i)$$

$$= \frac{1}{10}(-8+8i-6j-6k-4j-4k+3-3i)(1-i)$$

$$= \frac{1}{10}(-5+5i-10j-10k)(1-i)$$

$$= \frac{1}{10}(-5+5i-10j-10k+5i-5i^2+10ji+10ki)$$

$$= \frac{1}{10}(-5+5i-10j-10k+5i+5-10k+10j)$$

$= \frac{1}{10}(10i - 20k) = \underline{\underline{i - 2k}}.$

Z rovnice (2) vyjádříme *y*:

$$y = [(1 + 3i + 2j - 5k) - (1 + k)x](2 + i)^{-1},$$

vypočítáme inverzní prvek:

$$(2 + i)^{-1} = \frac{2 - i}{2^2 + 1^2} = \frac{2 - i}{5},$$

který dosadíme společně s hodnotou *x* do rovnice a vypočítáme *y*:

$$\underline{\underline{y}} = [(1 + 3i + 2j - 5k) - (1 + k)(i - 2k)]\frac{2-i}{5}$$

$$= \frac{1}{5}[(1 + 3i + 2j - 5k) - (1 + k)(i - 2k)](2 - i)$$

$$= \frac{1}{5}[(1 + 3i + 2j - 5k) - (i - 2k + ki - 2k^2)](2 - i)$$

$$= \frac{1}{5}(1 + 3i + 2j - 5k - i + 2k - j - 2)(2 - i)$$

$$= \frac{1}{5}(-1 + 2i + j - 3k)(2 - i) = \frac{1}{5}(-2 + 4i + 2j - 6k + i - 2i^2 - ji + 3ki)$$

$$= \frac{1}{5}(-2 + 4i + 2j - 6k + i + 2 + k + 3j) = \frac{1}{5}(5i + 5j - 5k) = \underline{\underline{i + j - k}}.$$

4.2 Fundamentální věta algebry pro kvaterniony

Základní věta algebry (též **Fundamentální věta algebry**) říká, že každý polynom s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden komplexní kořen. Důsledkem je tvrzení, že každý takový polynom má v komplexní rovině právě *n* kořenů (počítáme-li každý kořen i s jeho násobností). Tuto větu však v oboru kvaternionů nelze aplikovat, což ukážeme na následujících dvou příkladech.

Př. 1: Rovnice $x^2 = -1$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{H}$. Řešením je každý ryzí kvaternion s normou rovnou jedné, tedy $\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma$ s $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Takových kvaternionů existuje nekonečně mnoho, neboť odpovídají bodům na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^3$.

Př. 2: Rovnice $x^2 i - ix^2 = 1$ nemá v $\mathbb{H}$ žádné řešení. Protože $i(x^2 i - ix^2)i =$
$= (ix^2 i - i^2 x^2)i = (ix^2 i + x^2)i = ix^2 i^2 + x^2 i = x^2 i - ix^2$, ale $i1i = -1$.

Pojem polynomu je v oboru kvaternionů komplikovanější kvůli nekomutativnosti. Danému stupni polynomu tak odpovídá více výrazů. Například výrazy typu ax^2, xax, x^2a, $axbx$, apod. mají všechny stupeň $n = 2$.

V př. 2 se vyskytuje polynom, který obsahuje *dva* výrazy stupně $n = 2$. S tímto případem souvisí **Fundamentální věta algebry pro kvaterniony**. Ta říká, že pokud má polynom pouze *jeden* výraz s nejvyšším stupněm, pak existuje kořen v $\mathbb{H}$.

Další věta, která upravuje řešení polynomiálních rovnic je **Wedderburnova věta o rozkladu na kořenové činitele**: Nechť *D* je těleso s centrem *F* a nechť *P*(*t*) je ireducibilní monický polynom stupně *n* s koeficienty z komutativního tělesa *F*. Jestliže existuje $d \in D$ takové, že $P(d) = 0$, pak platí

$$P(t) = (t - d)(t - d_2)(t - d_3) \cdots (t - d_n),$$

kde existují nenulové prvky $s_i \in D$, $i = 2, 3, \dots, n$ takové, že $d_i = s_i d s_i^{-1}$ pro každé $i = 2, 3, \dots, n$. Pokud má tedy polynom jeden kořen v *D*, pak lze zcela rozložit jako součin lineárních činitelů nad tělesem *D*. (viz [9])

5 Kvaterniony a rotace

Připomeňme, že pro $u \in \mathbb{H}_1$ platí: $u^{-1} = \bar{u}$. Nyní si ukážeme, že jednotkový kvaternion lze též napsat ve tvaru

$$u = u_r \cos\varphi + u_v \sin\varphi = \cos\varphi + u_v \sin\varphi,$$

kde $u_r = [1, (0, 0, 0)]$ je jednotkový skalární kvaternion a u_v je jednotkový ryzí kvaternion rovnoběžný s vektorovou složkou kvaternionu u. Prozatím budeme φ považovat jako podíl skalární části a velikosti vektorové části kvaternionu. Tento zápis jednotkového kvaternionu nám později poslouží pro vyjádření rotace pomocí kvaternionů.

Důkaz, že tato forma platí, lze provést následovně:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 = u\bar{u} &= (u_r \cos\varphi + u_v \sin\varphi)\overline{(u_r \cos\varphi + u_v \sin\varphi)} \\
&= (u_r \cos\varphi + u_v \sin\varphi)(\overline{u_r} \cos\varphi + \overline{u_v} \sin\varphi) \\
&= u_r\overline{u_r} \cos^2\varphi + u_r\overline{u_v} \sin\varphi\cos\varphi + u_v\overline{u_r} \sin\varphi\cos\varphi + u_v\overline{u_v} \sin^2\varphi \\
&= \cos^2\varphi + (u_r\overline{u_v} + u_v\overline{u_r}) \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1
\end{aligned}$$

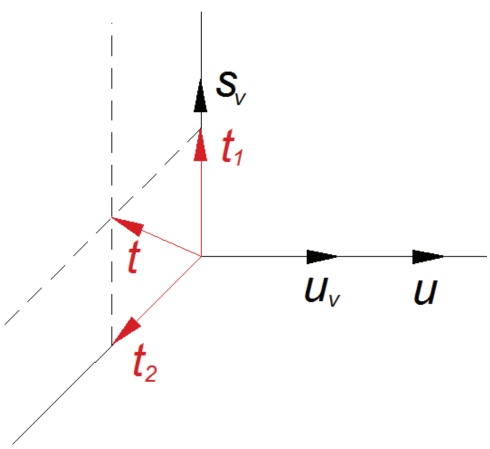
□

5.1 Součin jednotkového a ryzího kvaternionu

Nechť je s_v ryzí a u jednotkový kvaternion. Budeme uvažovat dva případy:

1) $s_v \perp u$, pak můžeme napsat

$$t = us_v = (\cos\varphi + u_v \sin\varphi)s_v = s_v \cos\varphi + u_v s_v \sin\varphi = t_1 + t_2,$$



Obrázek 5: Rotace s_v

kde $u_v \parallel u$. Jelikož je s_v vektor, pak $t_1 = s_v \cos\varphi$ je též vektor a platí $t_1 \parallel s_v$. Ze vztahu $s_v \perp u$ plyne, že i $s_v \perp u_v$, tedy t_2 je také vektor. To vyplývá z vlastnosti součinu dvou ryzích a na sebe kolmých kvaternionů, tzn. jejich součin je roven vektorovému součinu, tedy vektoru kolmému k s_v a u_v. Z toho plyne, že i $t_2 \perp s_v$ a $t_2 \perp u_v$. Jelikož je t součet vektorů, je sám také vektor. Vektory t_1 a t_2 leží v rovině kolmé k u. Tedy $t = t_1 + t_2$ může být v této rovině geometricky interpretováno jako rotace s_v o úhel φ, tedy rotace kolem osy, která je rovnoběžná s u.

Dále uvažujme součin

$$R_v = tu^{-1} = t\bar{u} = \cos\varphi\, t + \sin\varphi\, t\overline{u_v} = \cos\varphi\, t - \sin\varphi\, tu_v.$$

Využijeme-li vztah $tu_v = -u_v t$ (součin dvou ryzích kvaternionů odpovídá jejich vektorovému součin; zaměníme-li pořadí činitelů, změní se znaménko součinu), můžeme daný výraz přepsat:

$$R_v = \cos\varphi\, t + \sin\varphi\, u_v t.$$

Dostaneme tak další rotaci o úhel φ kolem osy u, takže výraz

$$R_v = us_v u^{-1}$$

představuje rotaci vektoru s_v kolem osy u o úhel 2φ.

2) v je libovolný vektor, který rozložíme do tvaru

$$v = w + s_v,$$

kde $w \parallel u$ a $s_v \perp u$. Pak

$$uvu^{-1} = u(w + s_v)u^{-1} = uwu^{-1} + us_v u^{-1} = uwu^{-1} + R_v,$$

kde R_v je vektor s_v zrotovaný kolem u o úhel 2φ. Při úpravě výrazu uwu^{-1} využijeme toho, že $w \parallel u$, tudíž můžeme psát $w = zu_v$, kde $z \in \mathbb{R}$ a $u_v \parallel u$. Tedy

$$uwu^{-1} = uzu_v u^{-1} = zuu_v u^{-1}.$$

Dále využijeme vztah pro součin kvaternionů s využitím skalárního a vektorového součinu: nechť $u, u_v \in \mathbb{H}_1$, kde $u = [s, \boldsymbol{a}]$ a $u_v = [0, \boldsymbol{b}]$. Pak pro násobení platí vztahy

$$uu_v = [-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + s\boldsymbol{b}] \text{ a } u_v u = [-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}].$$

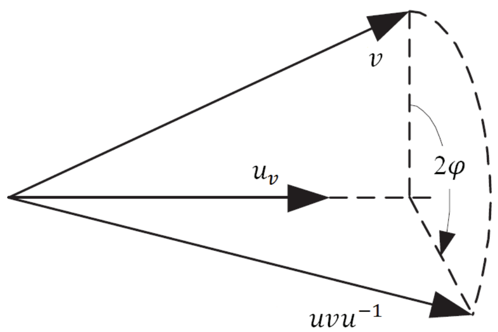
Jelikož je skalární součin komutativní, pak $-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. Dále z vlastnosti $u_v \parallel u$ plyne, že i $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, tedy $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = 0$. Vyplývá tedy, že $uu_v = u_v u$. Tudíž

$$zuu_v u^{-1} = zu_v uu^{-1} = zu_v = w.$$

Nakonec dostáváme, že

$$uvu^{-1} = w + R_v.$$

Tento vztah geometricky interpretujeme jako rotaci vektoru v kolem osy u o úhel 2φ. Platí tedy následující **věta:** Nechť $u \in \mathbb{H}_1$, $u = \cos\varphi + \boldsymbol{u_v}\sin\varphi$. Nechť $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a $v = [0, \boldsymbol{v}]$ je ryzí kvaternion. Pak $R_v = uvu^{-1}$ je obraz v v rotaci o úhel 2φ kolem osy, která je dána směrovým vektorem $\boldsymbol{u_v}$.



*Obrázek 6: Libovolný vektor **v** zrotovaný kolem jednotkového vektoru $\boldsymbol{u_v}$ ∥ $\boldsymbol{u}$ o úhel 2φ*

Tato operace provede stejnou rotaci pro všechny vektory včetně jednotkových vektorů souřadnicového systému. Proto může být použita pro transformování souřadnic jakékoliv vztažné soustavy do nové vztažné soustavy s odlišnou orientací.

5.2 Skládání po sobě následujících rotací

Nechť $u_1, u_2 \in \mathbb{H}_1$ reprezentují libovolné rotace v trojrozměrném prostoru. Aplikujeme-li je v daném pořadí na vektor *v*, dostaneme:

$$u_2(u_1 v u_1{}^{-1})u_2{}^{-1} = (u_2u_1)v(u_1{}^{-1}u_2{}^{-1}) = (u_2u_1)v(u_2u_1)^{-1} = u_i v u_i{}^{-1},$$

kde jednotkový kvaternion $u_i = u_2u_1$ je složení dvou po sobě následujících rotací. Obecně tato vlastnost platí pro složení libovolného počtu rotací. Tedy platí následující věta:

Věta: Nechť $u_1, u_2 \in \mathbb{H}_1$. Rotace daná u_1 následovaná rotací danou u_2 je ekvivalentní rotaci u_2u_1. Skládání rotací odpovídá násobení odpovídajících kvaternionů.

(viz [16 s. 3–7])

5.3 Rotace v SO(3)

Nejprve zavedeme obecnou lineární grupu $\boldsymbol{GL}(n,\mathbb{R})$, což je grupa všech regulárních reálných čtvercových matic dimenze n s operací běžného maticového násobení. Z této grupy budeme vycházet při definování dalších pojmů.

Definice: Reálná matice A typu $n \times n$ se nazývá ***ortogonální***, pokud $A^{-1} = A^T$, tedy pokud $AA^T = A^T A = E$. Takovéto matice tvoří ***ortogonální grupu*** $\boldsymbol{O}(n)$, která je podgrupou obecné lineární grupy $\boldsymbol{GL}(n,\mathbb{R})$. Tedy

$$\boldsymbol{O}(n) = \{A \in \boldsymbol{GL}(n,\mathbb{R}) | A^T A = E\}.$$

Poznámka:

Matice je ortogonální, pokud je její inverzní matice rovna její transponované matici. Jelikož je $\det A = \det(A^T)$, pak $(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = (\det A^T)(\det A) = \det E = 1$. Z toho plyne, že $\det A = \pm 1$.

Definice: Ortogonální matice, které mají determinant roven 1, tvoří podgrupu, kterou nazýváme ***speciální ortogonální grupa*** a značíme ji $\boldsymbol{SO}(n)$. Tedy

$$\boldsymbol{SO}(n) = \{A \in \boldsymbol{GL}(n,\mathbb{R}) | A^T A = E \wedge \det A = 1\}.$$

Ortogonální grupa $\boldsymbol{O}(n)$ je množina všech rotací a zrcadlení n-rozměrného Euklidova prostoru spolu s operací skládání. Speciální ortogonální grupa $\boldsymbol{SO}(n)$ popisuje všechny možné rotace v n-rozměrném Euklidově prostoru.

Věta: Matice A popisuje rotaci v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku, resp. v $\mathbb{R}^3$ kolem osy procházející počátkem, právě když $A \in \boldsymbol{SO}(2)$, resp. $A \in \boldsymbol{SO}(3)$.

Obecná rotace o úhel φ v prostoru $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ se dá zapsat ve vektorovém tvaru $(\boldsymbol{v}')^T = A\boldsymbol{v}^T$, kde $\boldsymbol{v}$ je rotovaný vektor a $A \in \boldsymbol{SO}(2)$, resp. $\boldsymbol{SO}(3)$. Matice rotace pak vypadá takto:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \text{ resp.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi + o_1^2(1-\cos\varphi) & o_1 o_2(1-\cos\varphi) - o_3\sin\varphi & o_1 o_3(1-\cos\varphi) + o_2\sin\varphi \\ o_1 o_2(1-\cos\varphi) + o_3\sin\varphi & \cos\varphi + o_2^2(1-\cos\varphi) & o_2 o_3(1-\cos\varphi) - o_1\sin\varphi \\ o_1 o_3(1-\cos\varphi) - o_2\sin\varphi & o_2 o_3(1-\cos\varphi) + o_1\sin\varphi & \cos\varphi + o_3^2(1-\cos\varphi) \end{bmatrix},$$

kde $\boldsymbol{o} = (o_1, o_2, o_3)$ je jednotkový vektor ve směru osy rotace.

Věta: Každý element v $\boldsymbol{SO}(3)$ se dá vyjádřit jako

$$v \mapsto qv\bar{q},$$

kde v je ryzí a q jednotkový kvaternion.

Poznámka: Jelikož je kvaternion q jednotkový, platí, že $\bar{q} = q^{-1}$ a zobrazení můžeme zapsat jako $v \mapsto qvq^{-1}$.

Souvislost reprezentace rotace pomocí kvaternionů a ortogonálních matic ukazuje tento vztah, kde $q \in \mathbb{H}_1$, tedy $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$R(q) = \begin{bmatrix} s^2 + x^2 - y^2 - z^2 & -2sz + 2xy & 2sy + 2xz \\ 2sz + 2xy & s^2 - x^2 + y^2 - z^2 & -2sx + 2yz \\ -2sy + 2xz & 2sx + 2yz & s^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & -2sz + 2xy & 2sy + 2xz \\ 2sz + 2xy & 1 - 2(x^2 + z^2) & -2sx + 2yz \\ -2sy + 2xz & 2sx + 2yz & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{SO}(3).$$

(viz [10 s. 32])

Následně si uvedeme pár konkrétních příkladů na otočení vektoru v trojrozměrném prostoru. Předtím si ještě pro doplnění ukážeme, jak lze rotaci vektoru $\boldsymbol{v}$ o úhel φ kolem jednotkového vektoru (= osy) $\boldsymbol{o}$ popsat vektorově:

$$R(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{o} + \cos\varphi\,(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{o}) + \sin\varphi\,(\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{v}), \tag{4}$$

kde $\cdot$ je skalární součin a $\times$ vektorový součin.

5.4 Příklady

Následující příklady na rotace budeme řešit, za účelem porovnání, hned několika způsoby:

a) vektorově,

b) ortogonální maticí,

c) maticově s využitím kvaternionů,

d) využitím vztahu $R_v = qvq^{-1} = qv\bar{q}$.

1. Otočte vektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ kolem osy $\boldsymbol{n} = (0, 1, 1)$ o úhel $\varphi = 60°$.

a) Jelikož $\boldsymbol{n}$ není jednotkový vektor, protože $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{2}$, využijeme vztah $\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}$ a vektor $\boldsymbol{n}$ na jednotkový upravíme. Dostaneme výraz

$$\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{0}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{o}$$

Vypočítáme si jednotlivé součiny

$$\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{v} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{v} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times (1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

které dosadíme společně s ostatními údaji do vztahu (4).

Dostaneme výraz:

$$R(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos 60° \left[(1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \sin 60° \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[(1, 0, 1) - \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}\right)$$

b)
$$A = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60° & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60° \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60° & \cos 60° + \frac{1}{2}(1 - \cos 60°) & \frac{1}{2}(1 - \cos 60°) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60° & \frac{1}{2}(1 - \cos 60°) & \cos 60° + \frac{1}{2}(1 - \cos 60°) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{v}')^T = A\boldsymbol{v}^T$**,** tedy

$$(\boldsymbol{v}')^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

c) Využijeme vztah pro vyjádření jednotkového kvaternionu q pomocí goniometrických funkcí a jednotkového vektoru $\boldsymbol{o} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, který ztotožníme s ryzím kvaternionem $o = [0, \boldsymbol{o}]$. Jelikož má být vektor $\boldsymbol{v}$ zrotován o 60°, argumentem u goniometrických funkcí bude úhel poloviční, tj. 30°. Tedy

$$q = \cos 30° + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Následně si vypočítám matici rotace:

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) & -2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4} & 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 & 2\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4} & 2\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Nakonec dosadím matici do vztahu $(\boldsymbol{v}')^T = R(q)\boldsymbol{v}^T$.

$$(\boldsymbol{v}')^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

d) Využijeme jednotkový kvaternion $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}$ z c) a k němu konjugovaný kvaternion $\bar{q} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}$. Vektor $\boldsymbol{v}$ ztotožníme s ryzím kvaternionem $v = [0, \boldsymbol{v}]$. Nakonec dosadíme do vztahu $R_v = qv\bar{q}$ a dostaneme:

$$R_v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{k})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{i}\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathbf{k}\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{8} + \mathbf{i}\frac{6+\sqrt{6}}{8} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{6}}{8} + \mathbf{k}\frac{6-\sqrt{6}}{8} + \mathbf{j}\frac{1}{8} - \mathbf{k}\frac{2\sqrt{6}+2}{16} + \frac{1}{8} + \mathbf{i}\frac{2\sqrt{6}-2}{16} + \mathbf{k}\frac{1}{8} + \mathbf{j}\frac{2\sqrt{6}+2}{16}$$

$$-\mathbf{i}\frac{1}{8} + \frac{2\sqrt{6}-2}{16}$$

$$= \mathbf{i}\frac{12+2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-2-2}{16} + \mathbf{j}\frac{2\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}+2}{16} + \mathbf{k}\frac{12-2\sqrt{6}-2\sqrt{6}-2+2}{16}$$

$$= \mathbf{i}\frac{2+\sqrt{6}}{4} + \mathbf{j}\frac{1+\sqrt{6}}{4} + \mathbf{k}\frac{3-\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[0, \left(2+\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}, 3-\sqrt{6}\right)\right]$$

2. Otočte vektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$ kolem osy $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ o úhel $\varphi = 120°$.

a) Jelikož $\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{3}$, využijeme opět vztah $\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}$ a dostaneme $\boldsymbol{o} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

$$\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \times (1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1)$$

Vypočítané výrazy dosadíme do vztahu (4):

$$R(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) + \cos 120°\left[(1, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right] + \sin 120°\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1)$$

$$= \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1) = (0, 1, 0)$$

b) $$A = \begin{bmatrix} \cos 120° + \frac{1}{3}(1-\cos 120°) & \frac{1}{3}(1-\cos 120°) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° & \frac{1}{3}(1-\cos 120°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° \\ \frac{1}{3}(1-\cos 120°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° & \cos 120° + \frac{1}{3}(1-\cos 120°) & \frac{1}{3}(1-\cos\varphi) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° \\ \frac{1}{3}(1-\cos 120°) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° & \frac{1}{3}(1-\cos 120°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 120° & \cos 120° + \frac{1}{3}(1-\cos 120°) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{v}')^T = A\boldsymbol{v}^T$**,** tedy

$$(\boldsymbol{v}')^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Jednotkový kvaternion q má tvar

$$q = \cos 60° + \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{1}{2} + \mathbf{k}\frac{1}{2}.$$

Matice rotace pak vypadá takto:

$$R(q)=\begin{bmatrix}1-2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) & -2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}\\ 2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4} & 1-2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) & -2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}\\ -2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4} & 1-2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Výsledným vektorem je

$$(\boldsymbol{v}')^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

d) Do vztahu $R_v = qv\bar{q}$ dosadíme

$q=\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}+\mathbf{j}\frac{1}{2}+\mathbf{k}\frac{1}{2}$, $v=[0,\boldsymbol{v}]$ a $\bar{q}=\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{1}{2}-\mathbf{j}\frac{1}{2}-\mathbf{k}\frac{1}{2}$. Tedy

$$R_v=\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}+\mathbf{j}\frac{1}{2}+\mathbf{k}\frac{1}{2}\right)\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{1}{2}-\mathbf{j}\frac{1}{2}-\mathbf{k}\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\mathbf{i}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\mathbf{k}\frac{1}{2}+\mathbf{j}\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{1}{2}-\mathbf{j}\frac{1}{2}-\mathbf{k}\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathbf{i}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\mathbf{k}\frac{1}{4}+\mathbf{j}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\mathbf{i}\frac{1}{4}+\mathbf{j}\frac{1}{4}+\mathbf{k}\frac{1}{4}-\mathbf{k}\frac{1}{4}+\mathbf{j}\frac{1}{4}-\mathbf{i}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\mathbf{j}\frac{1}{4}+\mathbf{k}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\mathbf{i}\frac{1}{4}$$

$$=\mathbf{j}=[0,(0,1,0)]$$

Poznámka: Každý element v $\boldsymbol{SO}(4)$ můžeme vyjádřit jako

$$v\mapsto q_1 v q_2,$$

kde $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$.

6 Kvaternionová grupa

6.1 Grupa Q_8

Kvaternionová grupa je neabelovská grupa řádu 8 tvořená prvky $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, značí se Q_8 či Q a má prezentaci

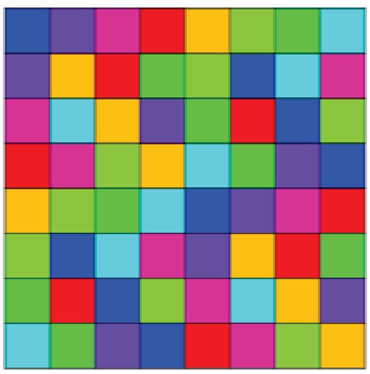
$$Q = \langle -1, i, j, k \mid (-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle,$$

kde 1 je jednotkový prvek a -1 komutuje se všemi ostatními prvky.

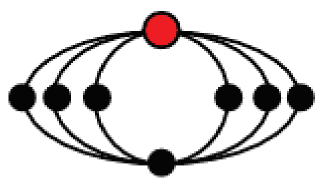
Tabulka 2: Cayleyho tabulka pro ***Q***

	− 1	**− *i***	**− *j***	**− *k***	**1**	***i***	***j***	***k***
− 1	1	i	j	k	− 1	− i	− j	− k
− *i*	i	− 1	k	− j	− i	1	− k	j
− *j*	j	− k	− 1	i	− j	k	1	− i
− *k*	k	j	− i	− 1	− k	− j	i	1
1	1	− i	− j	− k	1	i	j	k
i	− i	1	− k	j	i	− 1	k	− j
j	− j	k	1	− i	j	− k	− 1	i
k	− k	− j	i	1	k	j	− i	− 1

Tabulka 3: Multiplikativní tabulka pro ***Q***



← Jiný způsob znázornění multiplikativní tabulky pro Q, kde jsou jednotlivé prvky zapsány v totožném pořadí jako u tabulky 1.



Obrázek 7: Cyklový graf grupy ***Q***

Tato kvaternionová grupa má:

- 6 prvků $\{i, -i, j, -j, k, -k\}$ řádu 4, neboť $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, analogicky pro ostatní prvky,
- 1 prvek $\{-1\}$ řádu 2, neboť $(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1$,
- 1 prvek $\{1\}$ řádu 1, neboť $1^1 = 1$.

Podgrup existuje 6:

- 1 řádu 8: $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$,
- 3 řádu 4: $\{1, -1, i, -i\}, \{1, -1, j, -j\}, \{1, -1, k, -k\}$,
- 1 řádu 2: $\{1, -1\}$,
- 1 řádu 1: $\{1\}$.

Ačkoliv je kvaternionová grupa neabelovská, všechny její podgrupy jsou normální, tzn., že každý prvek grupy Q komutuje s každou její podgrupou.

Jelikož mají prvky i, j, k řád 4 a každé dva z nich generují celou grupu, můžeme grupu Q zapsat i jiným způsobem:

$$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, aba = b \rangle.$$

Místo $aba = b$ lze použít ekvivalentní vztah $b^{-1}ab = a^{-1}$.
O korektnosti zápisu se můžeme přesvědčit např. volbou $a = i, b = j$ a $ab = k$.
(viz [31], [21])

6.2 Maticová reprezentace

Uvažujme podmnožinu T speciální lineární grupy $\boldsymbol{SL}(2, \mathbb{C})$, tj. množiny regulárních matic typu 2×2 nad tělesem $\mathbb{C}$, které mají determinant roven jedné. Nechť tato podmnožina obsahuje tyto matice:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podgrupa grupy $\boldsymbol{SL}(2, \mathbb{C})$ generovaná množinou T je řádu 8 a nazývá se ***kvaternionová grupa***. Vzhledem k tomu, že $I^{-1} = -I, J^{-1} = -J$ a $JI = -IJ$, platí

$$\langle T \rangle = \langle I, J \rangle = \{E, -E, I, -I, J, -J, IJ, -IJ\},$$

kde $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jednotková matice.

Tabulka 4: Cayleyho tabulka pro $\langle \boldsymbol{T} \rangle$

	E	**–E**	**I**	**–I**	**J**	**–J**	**IJ**	**–IJ**
E	E	$-E$	I	$-I$	J	$-J$	IJ	$-IJ$
–E	$-E$	E	$-I$	I	$-J$	J	$-IJ$	IJ
I	I	$-I$	$-E$	E	IJ	$-IJ$	$-J$	J
–I	$-I$	I	E	$-E$	$-IJ$	IJ	J	$-J$
J	J	$-J$	$-IJ$	IJ	$-E$	E	I	$-I$
–J	$-J$	J	IJ	$-IJ$	E	$-E$	$-I$	I
IJ	IJ	$-IJ$	J	$-J$	$-I$	I	$-E$	E
–IJ	$-IJ$	IJ	$-J$	J	I	$-I$	E	$-E$

Grupa $\mathcal{N} = \{E, -E\}$, která je normální podgrupou $\langle T \rangle$, je centrem grupy $\langle T \rangle$. Levé a pravé rozkladové třídy podle $\mathcal{N}$ v $\langle T \rangle$ se shodují:

$$
\begin{array}{r|l}
\{E, -E\}\mathcal{N} = \mathcal{N} & \mathcal{N}\{E, -E\} = \mathcal{N} \\
I\mathcal{N} = \{I, -I\} & \mathcal{N}I = \{I, -I\} \\
-I\mathcal{N} = \{I, -I\} & \mathcal{N}(-I) = \{I, -I\} \\
J\mathcal{N} = \{J, -J\} & \mathcal{N}J = \{J, -J\} \\
-J\mathcal{N} = \{J, -J\} & \mathcal{N}(-J) = \{J, -J\} \\
IJ\mathcal{N} = \{IJ, -IJ\} & \mathcal{N}IJ = \{IJ, -IJ\} \\
-IJ\mathcal{N} = \{IJ, -IJ\} & \mathcal{N}(-IJ) = \{IJ, -IJ\}
\end{array}
$$

Jsou tedy celkem 4 třídy. Na množině rozkladových tříd podle $\mathcal{N}$ v $\langle T \rangle$ můžeme zavést grupovou operaci: $a\mathcal{N} \cdot b\mathcal{N} = (a \cdot b)\mathcal{N}$. Množina levých rozkladových tříd s touto operací pak tvoří opět grupu, která se nazývá ***faktorová grupa*** $\langle T \rangle$ podle normální podgrupy $\mathcal{N}$, značí se $\langle T \rangle / \mathcal{N}$. Tato grupa je přitom navíc izomorfní s ***Kleinovou čtyřgrupou***. (viz [3 s. 43, 44])

Tabulka 5: Cayleyho tabulka pro $\langle \boldsymbol{T} \rangle / \mathcal{N}$

	$\mathcal{N}$	$I\mathcal{N}$	$J\mathcal{N}$	$IJ\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$I\mathcal{N}$	$J\mathcal{N}$	$IJ\mathcal{N}$
$I\mathcal{N}$	$I\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$IJ\mathcal{N}$	$J\mathcal{N}$
$J\mathcal{N}$	$J\mathcal{N}$	$IJ\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$I\mathcal{N}$
$IJ\mathcal{N}$	$IJ\mathcal{N}$	$J\mathcal{N}$	$I\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$

7 Některé zdroje zabývající se kvaterniony

V této kapitole jsou uvedeny některé z pramenů, ze kterých jsem čerpala, spolu s jejich stručným obsahem. Zmiňuji zde i další oblasti problematiky kvaternionů, jimiž se tato bakalářská práce nezabývá a které lze v případě hlubšího zájmu o danou tematiku nalézt v příslušné literatuře.

BEČVÁŘ, J. - 150 let od objevu kvaternionů

Nalezneme zde poměrně podrobný popis historického vývoje komplexních čísel a kvaternionů, zmínku o bikvaternionech a pojednání o oktonionech.

EBERLY, D. - Quaternion Algebra and Calculus

Kromě základních vlastností kvaternionů a jejich vztahu k rotacím se text zabývá kvaternionovými interpolacemi, které mají mj. využití v počítačové grafice.

LEWIS, D. W. - Quaternion Algebras and the Algebraic Legacy of Hamilton's Quaternions

Práce obsahuje relativně obsáhlé pojednání o kvaternionových algebrách. Dále se zabývá rovnicemi v oboru kvaternionů a kvaternionovými vlastními čísly. Popisuje i vliv kvaternionů na teorii grup a na objevy dalších algeber.

PROŠKOVÁ, J. - Kvaterniony a jejich užití v geometrii

Jedná se o bakalářskou práci, jejíž stěžejní částí je souvislost kvaternionů s grupami $O(n), SO(n), U(n)$ a $SU(n)$. Poměrně podrobně popisuje rotaci v $SO(3)$ a $SO(4)$. Součástí práce je i pojednání o různém využití kvaternionů v praxi.

PROŠKOVÁ, J. - Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace

Diplomová práce navazující na předchozí bakalářskou. Podrobně se zabývá zejména duálními kvaterniony a jejich aplikací v praxi.

SÄRKKÄ, S. - Notes on Quaternions

Krátký text shrnující základní vlastnosti, reprezentaci rotací pomocí kvaternionů a kvaternionové diferenciální rovnice.

STAHLKE, D. - Quaternions in Classical Mechanics

Popisuje konstrukci kvaternionů z komplexních čísel, vlastnosti kvaternionů, použití při rotacích a maticovou reprezentaci kvaternionů.

VICCI, L. - Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretation

Kromě základních vlastností je zde pomocí násobení jednotkovým kvaternionem odvozen vztah pro rotaci. Další část textu je věnována aplikacím v inerciálním navigačním systému.

Wikipedia, The Free Encyclopedia: Quaternion

Zde si můžeme přečíst podrobné pojednání o historii kvaternionů. Nechybí ani výčet základních vlastností, maticová reprezentace a souvislost s rotacemi ve 3D i 4D.

8 Závěr

V této bakalářské práci byl nejprve popsán historický vývoj komplexních čísel a pokusy o rozšíření tohoto číselného oboru, což vedlo k zavedení tzv. hyperkomplexních čísel. Roku 1843 objevil Hamilton čtveřice se vztahem pro součin imaginárních složek a nazval je kvaterniony. Původně byly jeho snahy zaměřeny na trojsložková čísla, ale neúspěch tohoto prvotního záměru byl později objasněn mj. díky Adolfu Hurwitzovi. Kromě kvaternionů byly později zavedeny i bikvaterniony a duální kvaterniony.

Vlastnosti kvaternionů jsou téměř analogické s vlastnostmi komplexních čísel. Jelikož je $(\mathbb{C}, +)$ i $(\mathbb{C}, \cdot)$ komutativní grupa, tvoří komplexní čísla komutativní těleso (neboli pole). Kvaterniony však tvoří těleso nekomutativní, protože $(\mathbb{H}, +)$ tvoří komutativní grupu, ale $(\mathbb{H}, \cdot)$ tvoří grupu nekomutativní.

Co se týče rovnic v oboru kvaternionů, bylo ukázáno, že nelze aplikovat základní větu algebry. To bylo ilustrováno např. na rovnici $x^2 i - ix^2 = 1$, která by měla mít 2 řešení. V oboru kvaternionů však nemá řešení žádné. Na několika dalších lineárních rovnicích bylo poukázáno na některé obtíže spojené s nekomutativností a s třemi imaginárními složkami. Příklady byly navíc voleny tak, aby se k nim ještě dalo nalézt „rozumně“ řešení.

Další kapitola byla věnována rotacím. Nejprve byl odvozen vztah uvu^{-1} a bylo poukázáno na souvislost s maticemi $\boldsymbol{SO}(3)$. Vybrané příklady na výpočet rotací byly řešeny několika způsoby: čistě vektorově, pomocí ortogonální matice, dále pomocí ortogonální matice, jejíž členy byly vyjádřeny z koeficientů jednotkového kvaternionu, a v neposlední řadě výpočtem pomocí uvu^{-1}. Ukázalo se, že výpočet pomocí posledního vztahu je výhodnější než pomocí matic, protože matice obsahují více složek než kvaterniony.

Nechybí zde ani pojednání o kvaternionových grupách. Zajímavou vlastností je, že ačkoliv není grupa Q abelovská (čili komutativní), všechny její podgrupy jsou normální (čili každý prvek grupy s nimi komutuje).

9 Literatura a zdroje

[1] BEČVÁŘ, J. 150 let od objevu kvaternionů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 1993, 38. ročník, 6. číslo, s. 305–317. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/137554/PokrokyMFA_38-1993-6_1.pdf>

[2] BIRKHOFF, G. - MACLANE, S. *A Survey Of Modern Algebra.* New York, 1977.

[3] BLYTH, T. S. - ROBERTSON, E. F. Essential Student Algebra, *Volume 3: Abstract Algebra*. Bristol, 1986.

[4] BLYTH, T. S. - ROBERTSON, E. F. Essential Student Algebra, *Volume 5: Groups*. Bristol, 1986.

[5] BUCHMANN, A. *A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables*. Chapman University. [online]. [citováno 15. 03. 2012]. Dostupné z: <http://www.homsigmaa.org/buc.pdf>

[6] EBERLY, D. *Quaternion Algebra and Calculus.* Geometric Tools, LLC, 2010. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf>

[7] JUDSON, T. J. *Abstract Algebra, Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University, 2011. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://abstract.ups.edu/download.html>

[8] KRÝSL, S. *Rotace v* $\mathbb{R}^3$. [online]. [citováno 16. 04. 2012]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~krysl/rotace.pdf>

[9] LEWIS, D. W. *Quaternion Algebras and the Algebraic Legacy of Hamilton's Quaternions*. Irish Math. Soc. Bulletin 57, 2006. [online]. [citováno 15. 03. 2012]. Dostupné z: <http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull57/S5701.pdf>

[10] PROŠKOVÁ, J. *Kvaterniony a jejich užití v geometrii.* Plzeň, 2006. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd.

[11] PROŠKOVÁ, J. *Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace.* Plzeň, 2009. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd.

[12] RONEY, J. *William Kingdon Clifford.* [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://oro.open.ac.uk/8455/1/chapter4%28020507%29.pdf>

[13] SÄRKKÄ, S. *Notes on Quaternions*. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://www.lce.hut.fi/~ssarkka/pub/quat.pdf>

[14] STAHLKE, D. *Quaternions in Classical Mechanics*. PHYS 621. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://www.stahlke.org/dan/phys-papers/quaternion-paper.pdf>

[15] STUDNIČKA, F. J. O kvaternionech. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.* 1876, s. 145–151. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/121715/CasPestMatFys_005-1876-4_1.pdf>

[16] VICCI, L. *Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretation*. Chapel Hill, 2001. University of North Carolina at Chapel Hill. [online]. [citováno 15. 03. 2012]. Dostupné z: <ftp://ftp.cs.unc.edu/pub/techreports/01-014.pdf>

[17] VILD, J. *Podklady k přednáškám z algebry*

[18] VÝRUT, R. *Kvaterniony*. Plzeň, 2009. Západočeská univerzita v Plzni. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/279>

[19] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld: Complex Number.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: < http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html>

[20] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld: Quaternion.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html>

[21] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld: Quaternion Group.* [online]. c2012 [citováno 16. 04. 2012]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/QuaternionGroup.html>

[22] WHITE, S. *Complex numbers and Quaternions as Matrices.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://zipcon.net/~swhite/docs/math/quaternions/matrices.html>

[23] *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie: Biquaternion.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Biquaternion&oldid=100710771>

[24] *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie: Komplexe Zahl.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Komplexe_Zahl&oldid=100267642>

[25] *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie: Quaternion.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Quaternion&oldid=100914656>

[26] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Complex number.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Complex_number&oldid=481998938>

[27] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Dual number.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dual_number&oldid=463823543>

[28] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Dual quaternion.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dual_quaternion&oldid=478911022>

[29] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: History of quaternions*. [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_quaternions>

[30] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Quaternion.* [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quaternion&oldid=482177266>

[31] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Quaternion group.* [online]. c2012 [citováno 16. 04. 2012]. Dostupné z: < http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion_group>

[32] *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Rotation matrix.* [online]. c2012 [citováno 16. 04. 2012]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_rotation>

[33] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Komplexní číslo*. [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Komplexn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo&oldid=8160765>

[34] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Kvaternion*. [online]. c2012 [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Kvaternion&oldid=8055037>

[35] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Otočení (geometrie)*. [online]. c2012 [citováno 16. 04. 2012]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Oto%C4%8Den%C3%AD_(geometrie)&oldid=8223970>

[36] YEFREMOV, A. P. *Quaternions: algebra, geometry and physical theories.* Russian University of people friendship, 2004. s. 104–119. [online]. [citováno 17. 03. 2012]. Dostupné z: <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/147/en/pdf/01-10-e.pdf>